TD Probabilités

E54 **Exercice 1** 🍃 🏠 Une urne contient 20 boules : 5 boules blanches, 5 boules rouges, 10 boules noires.

Indication : *Pour chaque question, modéliser ou bien en exprimant l'évènement considéré en fonction d'évènements élémentaires, ou bien en introduisant un univers muni d'une loi uniforme et en comptant le nombre d'issues favorables.*

1. On tire 3 boules avec remise. Calculer les probabilités que le tirage soit tricolore et unicolore.
2. On tire 3 boules simultanément. Quelle est la probabilité de n'avoir tiré que des boules noires ?

Dénombrement

395 **Exercice 2** On lance 6 dés. Quelle est la probabilité que toutes les faces exhibent un chiffre différent ?

9FW **Exercice 3** On considère 101 boules numérotées de 0 à 100. On en choisit deux au hasard. Quelle est la probabilité que la somme de leurs numéros soit paire ?

ISO **Exercice 4** 🍃 On considère une classe de $n = 48$ élèves, dont aucun n'est né un 29 février.

1. Quel est le nombre de 48-listes $(x_1, \dots, x_{48})$ d'éléments distincts $x_i \in [\![1, 365]\!]$?
2. Quelle est la probabilité p que deux élèves au moins aient leurs anniversaires le même jour ?
3. Quelle est la probabilité q qu'une unique paire d'élèves aient leurs anniversaires le même jour ?
4. Soient $a_1, \dots, a_n \in]0,1[$ et $m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$. Montrer que $\prod_{i=1}^{n} (1 - a_i) \leq (1 - m)^n$.
5. En déduire que $p \geq 1 - \left(\frac{341.5}{365}\right)^{48} \simeq 0.96$ et $q \leq \frac{1}{365}\binom{48}{2}\left(\frac{342}{365}\right)^{47} \simeq 0.14$

8AC **Exercice 5** Une urne contient $2n$ boules numérotées. On tire toutes les boules sans remise.

1. Quelle est la probabilité que l'on tire les boules de numéros impairs dans l'ordre croissant, non nécessairement consécutivement.
2. Quelle est la probabilité que l'on tire les boules de numéros impairs dans l'ordre croissant consécutivement.

D4L **Exercice 6** ★ On a deux boîtes d'allumettes, contenant n allumettes chacune. On tire dans l'une ou l'autre au hasard jusqu'à ce qu'une soit vide. Quelle est la loi du nombre B_n d'allumettes restantes ?

Évènements et indépendance

L6S **Exercice 7** On lance n pièces donnant Pile avec probabilité p. Quelle est la probabilité que le nombre de «Face» soit pair ?

6U1 **Exercice 8** 🍃 On lance quatre dés. On note M le maximum des résultats.

1. Pour $k \in [\![1, 6]\!]$, déterminer $P(M \leq k)$.
2. En déduire la loi de M.

5Z2 **Exercice 9** 🏠 On tire une pièce biaisée N fois avec probabilité p de donner «Pile».

1. Pour $k \in [\![0, N]\!]$, quelle est la probabilité que l'on obtienne exactement k «Pile» ?
2. Quelle est la probabilité que «Face» ne soit jamais suivi de «Pile» ?

Z44 **Exercice 10** On considère N urnes numérotées. On lance n boules dans celles-ci, au hasard.

1. On note X_1 le nombre de boules dans la première urne. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, que vaut $P(X_1 = k)$?
2. ★ On note X_2 le nombre de boules dans la seconde urne. Pour $k, \ell \in [\![0, n]\!]$, calculer $P(X_1 = k \text{ et } X_2 = \ell)$

VIR **Exercice 11** 🍃 Soient X, Y indépendantes, suivant la même loi $\mathcal{B}(n, p)$.

1. Rappeler $X(\Omega)$ et $P(X = k)$.
2. Exprimer $P(X = Y)$.
3. Pour $p = \frac{1}{2}$, simplifier.

XOY **Exercice 12** Soit $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille finie d'évènements d'un espace probabilisé (Ω, T, P). Montrer que

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq P(A_1) + \dots + P(A_n) \leq P(A_1 \cap \dots \cap A_n) + n - 1.$$

QOB **Exercice 13** On joue à pile ou face $2n + 1$ fois.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir strictement plus de «Pile» que de «Face» ?
2. Montrer que $$\sum_{k=n+1}^{2n+1} 2^{-k}\binom{k-1}{n} = \frac{1}{2}.$$

7Q5 **Exercice 14** ★ ♣ Percolation On considère un graphe $\tilde{G}$ dont les sommets sont $\mathbb{Z}^2$ et les arêtes relient deux points à distance 1. Soit $p \in [0,1]$. On construit $G \subset \tilde{G}$ en gardant chaque arête indépendamment avec probabilité p.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}_n$ l'évènement «il existe un chemin auto-évitant de longueur n issu de $(0, 0)$» et $\mathcal{C}$ l'évènement «il existe un chemin infini issu de $(0, 0)$ dont la distance à l'origine tend vers $+\infty$». On note $\theta(p)$ la probabilité de $\mathcal{C}$.

1. ★ Montrer que $\mathcal{C} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_n$. On convient alors que $\theta(p) = \lim_{n\to+\infty} P(\mathcal{C}_n)$.
2. a) Soit A_n l'ensemble des chemins auto-évitants de longueur n partant de $(0, 0)$. Montrer que $|A_n| \leq 4 \times 3^{n-1}$.
   b) En déduire que $\theta(p) = 0$ si $p < \frac{1}{3}$.
3. On note G^* le graphe dual de G, dont les sommets sont les points à coordonnées $(n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2})$ et deux sommets à une distance 1 sont reliés par une arête si et seulement si celle-ci ne croise pas une arête de G.
   a) Soit C_n l'ensemble des cycles à sommets distincts de G^* de longueur n entourant $(0, 0)$. Montrer que $|C_n| \leq 3^{n-1}4n$.
   b) Montrer que $\theta(p) > 0$ pour p proche de 1.
4. Montrer que θ est croissante.

80B **Exercice 15** ★ [Oral ENS] Soit $\alpha \in]0,1[$. Un joueur joue n parties d'un même jeu. La probabilité de victoire à chaque partie est $\frac{\alpha}{n}$.

1. On suppose les parties mutuellement indépendantes. Montrer que l'on peut minorer la probabilité d'obtenir exactement une victoire par un réel > 0 indépendant de n.
2. On suppose uniquement que les parties sont indépendantes deux à deux. Peut-on
   a) majorer la probabilité précédente par une constante $< \alpha$? b) minorer la probabilité précédente par une constante > 0 ?

Probabilités conditionnelles

2PZ **Exercice 16** Une urne contient 5 boules blanches, 4 boules noires, 3 boules rouges. On tire trois boules dans l'urne, sans remise.

1. Quelle est la probabilité de tirer 3 boules de la même couleur ?
2. De tirer 3 boules de couleurs différentes ?

T95 **Exercice 17** Une urne contient 10 BN et 30 BB, une seconde 20 BN et 20 BB. On choisit une urne au hasard, puis une boule au hasard dans cette urne.

1. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?
2. On a tiré une boule blanche. Quelle est la probabilité qu'on ait choisi la première urne ?

FTC **Exercice 18** On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne k se trouvent k BB et $n-k$ BN. On choisit au hasard une urne et on tire deux boules dans cette urne.

1. Quelle est la probabilité d'avoir deux boules blanches ?
2. Même question si l'on tire une première boule, que l'on remet, avant de recommencer (on rechoisit une urne) pour tirer une seconde boule.
3. Limite de ces probabilités quand $n \to +\infty$.

UBV **Exercice 19** Une urne contient n boules noires et b boules blanches. On tire des boules sans remise.

1. On tire m boules au total, avec $m \leq n+b$. Quelle est la loi du nombre B de boules blanches tirées ?
   Indication : *On peut supposer que les boules sont numérotées, de 1 à $n+b$, les n premières étant noires.*
2. Quelle est la probabilité que la première boule blanche soit tirée au m-ième tirage ?
3. Quelle est la probabilité que la k-ième boule blanche soit tirée au m-ième tirage ?

77V **Exercice 20** Deux joueurs A et B tirent tour à tour au panier, A a une probabilité p de mettre la balle dans le panier, B a une probabilité q. Le premier joueur à mettre la balle gagne. Le joueur A commence. Quelle est la probabilité que A gagne ?

OW6 **Exercice 21** Bob apprend à Alice à cuisiner des cannelés. Bob les réussit neuf fois sur dix et Alice six fois sur dix. Pour s'entrainer, Alice cuisine deux fois plus souvent que Bob. On mange des cannelés réussis, quelle est la probabilité qu'ils aient été cuisinés par Alice ?

NLY **Exercice 22** On lance une pièce équilibrée une infinité de fois et on considère l'évènement A_k : «au cours des k premiers lancers, il n'est jamais sorti trois pile de suite» avec la convention $A_0 = \Omega$.

1. Montrer que pour $k \geq 3$, $P(A_k) = \frac{1}{2}P(A_{k-1}) + \frac{1}{4}P(A_{k-2}) + \frac{1}{8}P(A_{k-3})$.
2. On note α, β, γ les racines complexes du polynôme $X^3 - \frac{X^2}{2} - \frac{X}{4} - \frac{1}{8}$. Montrer que $\max(|\alpha|, |\beta|, |\gamma|) < 1$ et en déduire la limite de $P(A_k)$, quand $k \to +\infty$
3. Reprendre ce qui précède avec l'évènement B_k : «au cours des k premiers lancers, il n'est jamais sorti la séquence PFP».
4. Soit S une suite fixée dans $\{F, P\}^N$. Montrer, sans calcul, qu'il est presque certain que S apparaît au moins une fois lors d'une infinité de tirages mutuellement indépendants. Montrer qu'il est presque certain que S apparaît une infinité de fois.

KDD **Exercice 23** Urne de Pólya Une urne contient R_0 boules rouges et B_0 boules bleues. On répète l'expérience suivante : on tire une boule au hasard dans l'urne, on la remet et on rajoute une boule de la couleur de la boule tirée à l'urne. On note R_n et B_n le nombre de boules rouges et bleues dans l'urne après n étapes. Montrer par récurrence sur n que la probabilité de tirer une boule rouge à l'étape n est $\frac{R_0}{R_0+B_0}$.

KBV **Exercice 24** Mélange de Knuth Une liste de taille n contient initialement les entiers $1, 2, \ldots, n$, ordonnés. On réalise n transpositions aléatoires : à la i-ème étape, en échange le i-ème élément de la liste avec un des i premiers.

1. On note X_k^i la valeur contenue à la k-ième place, après la i-ème étape. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, et tout $i \geq k$, X_k^i suit une loi uniforme sur $[\![1, i]\!]$.
2. ★ Montrer que la permutation aléatoire obtenue au bout de n étapes suit une loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$.

DLY **Exercice 25** ★ Ruine du joueur Un joueur dispose d'une fortune initiale f. À chaque partie, il mise un jeton. Il a une probabilité $r > 0$ de gagner un nouveau jeton et $1 - r > 0$ de le perdre.

1. On suppose que le joueur s'arrête s'il est ruiné, ou s'il obtient N jetons. On note $p_{f,N}$ la probabilité de ruine du joueur.
   a) Déterminer une relation de récurrence sur f reliant les $p_{f,N}$.
   b) Calculer la valeur de $p_{f,N}$.
   c) En déduire que le jeu est presque sûrement fini.
2. On suppose à présent que le joueur ne s'arrête qu'une fois ruiné. On note p_f la probabilité de ruine.
   a) On suppose $r \leq \frac{1}{2}$. Montrer que presque sûrement, le joueur fini ruiné.
   b) On suppose $r > \frac{1}{2}$. En considérant, à f fixé, l'évènement $B_{(f)}^N$: «Le joueur atteint à un instant une fortune N», montrer que $p_f \xrightarrow[f \to +\infty]{} 0$.
   c) En déduire la valeur de p_f.